第 36 卷第 6 期　　大 学 数 学　　Vol. 36, №. 6
2020 年 12 月　　COLLEGE MATHEMATICS　　Dec. 2020

对称区间上一类含指数函数积分的探讨

张艳红，　周　勇，　吕书龙
（福州大学 数学与计算机科学学院，福州 350108）

［摘　要］给出了对称区间上一类含有指数函数的积分命题，该命题的结论与指数函数的积分无关，并由此命题给出若干国内外数学竞赛试题的统一解法.

［关键词］指数函数；积分；对称区间
［中图分类号］O177.5　　［文献标识码］C　　［文章编号］1672-1454(2020)06-0067-03

1　引　　言

在微积分或数学分析中定积分占有非常重要的地位，定积分中含指数函数的积分是考研题、竞赛题的重要来源. 首先介绍几道含指数函数定积分的数学竞赛试题.

（i）证明　$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^2x\cos^2x}{(1+e^x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cos^2x dx$. 并求 I 的值（2010 年陕西省第八次大学生数学奥林匹克竞赛试题）.

（ii）计算　$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+e^x)(x^2+1)}dx$（前苏联大学生数学奥林匹克竞赛试题）.

（iii）设 n 为自然数，计算定积分　$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}dx$（1996 年第三届国际大学生数学竞赛试题）.

含指数函数的积分，较多情况通过分部积分来求积分，但有时通过分部积分会出现计算量偏大甚至无法顺利求解. 以上的题目如果用分部积分的方法就会无法顺利解决.

本文将给出一个含指数函数的积分的命题，由此命题可以给出以上几道试题的统一解答，再通过其他例子进一步说明此命题的结论.

2　命　　题

命题　设 $f(x)$ 为 $[-A,A]$ 上连续的偶函数，并且 $g(x)$ 为 $[-A,A]$ 上连续的奇函数，则

$$I=\int_{-A}^{A}\frac{f(x)a^{g(x)}}{1+a^{g(x)}}dx=\int_{-A}^{A}\frac{f(x)}{1+a^{g(x)}}dx=\int_0^A f(x)dx.$$

证　令 $t=-x$，则

$$I=\int_{A}^{-A}\frac{f(-t)a^{g(-t)}}{1+a^{g(-t)}}(-dt)=\int_{-A}^{A}\frac{f(t)}{1+a^{g(t)}}dt=\int_{-A}^{A}\frac{f(x)}{1+a^{g(x)}}dx,$$

［收稿日期］2019-09-24；［修改日期］2020-04-16
［基金项目］福建省自然科学基金(面上)项目(2018J01664)；福州大学科学研究基金资助(GXRC-18047)；福建省本科高校教育教学改革研究项目(FBJG20180086)；全国高等院校计算机基础教育研究会 2019 年度项目(2019-AFCEC-109)；福州大学 2018 年一流本科教学改革建设项目
［作者简介］张艳红(1976－)，女，硕士，副教授，从事微分方程研究. Email：732143017@qq.com
［通讯作者］周勇(1980－)，男，硕士，讲师，从事公共基础课教学研究. Email：49011411@qq.com

从而 $2I=\int_{-A}^{A}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{A}f(x)\mathrm{d}x$，所以 $I=\int_{0}^{A}f(x)\mathrm{d}x$.

推论 设 $f(x)$ 为 $[-A,A]$ 上连续的偶函数，并且 $g(x)$ 为 $[-A,A]$ 上连续的奇函数，则

$$I=\int_{-A}^{A}\frac{f(x)\mathrm{e}^{g(x)}}{1+\mathrm{e}^{g(x)}}\mathrm{d}x=\int_{-A}^{A}\frac{f(x)}{1+\mathrm{e}^{g(x)}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{A}f(x)\mathrm{d}x.$$

以上命题最后的结论与指数函数的积分无关，利用命题去求解这一类含指数函数的积分比文献[3]的方法更简便，同时具有更加广泛的应用范围. 这样，以上数学竞赛题利用命题的结论，问题就迎刃而解.

试题(i)的解答：

证 $$I\xlongequal{t=-x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-t}\sin^2 t\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}(-t)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos^2 t}{1+\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x$$

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{16}.$$

试题(ii)的解答：

解 $$\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+\mathrm{e}^x)(x^2+1)}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\frac{1}{(x^2+1)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

试题(iii)的解答：

解 $$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{(1+2^x)\sin x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,$$

当 $n\geqslant 2$ 时，$I_n-I_{n-2}=\int_{0}^{\pi}\frac{\sin nx-\sin(n-2)x}{\sin x}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\pi}\cos(n-1)x\mathrm{d}x=0.$

则 $I_n=I_{n-2}$，且 $I_0=0, I_1=\pi$，所以

$$I_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \pi, & n=2k+1,\ k\in N.\end{cases}$$

3 应用例子

下面列举几个被积函数略复杂的例子进一步说明所给命题在积分计算中的简便.

例1 计算 $I=\int_{-1}^{1}\frac{\ln(2+x^2)}{1+\mathrm{e}^{x^3}}\mathrm{d}x.$

解 $$I=\int_{0}^{1}\ln(2+x^2)\mathrm{d}x=x\ln(2+x^2)\Big|_0^1-\int_{0}^{1}\frac{4x^2}{2+x^2}\mathrm{d}x=\ln 3-4+4\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例2 计算 $I=\int_{-1}^{1}\frac{\arctan^2 x\mathrm{e}^{x^5}}{1+\mathrm{e}^{x^5}}\mathrm{d}x.$

解 $$I=\int_{0}^{1}\arctan^2 x\mathrm{d}x=x\arctan^2 x\Big|_0^1-\int_{0}^{1}\arctan x\mathrm{d}\ln(1+x^2)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi\ln 2}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

4 结 论

含指数函数的积分在积分学中占有重要地位，本文遵循问题发现、问题解决、例题验证三个方面展开阐述，对该知识点进行详细的梳理，通过类比思维的方法，给出命题和推论，这样有助于在教学中用较少的课时对相关结果加以介绍，并对学生掌握对称区间上含指数函数的定积分有较大的帮助.

致谢 参考文献[2－3]对本文有较大的启发，在此表示感谢！

[参 考 文 献]

[1] 同济大学数学系. 高等数学：上册[M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007：149.

[2] 刘蔚萍，毕志伟，刘继成．一类含指数函数的不定积分的探讨[J]．大学数学，2019，35(1)：89－93．

[3] 潘杰，苏化明．若干数学竞赛的统一解法[J]．大学数学，2014，30(6)：111－114．

The Exploration on a Class of Definite Integrals with Exponential Functions

ZHANG Yan-hong ,　*ZHOU Yong* ,　*Lü Shu-long*

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: A class of integral proposition exponential functiongs on symmetric intervals is given, the conclusion of this proposition is independent of the integral of exponential functiongs, From this proposition, a unified solution of some domestic and foreign mathematics completion questions is given.

Key words: exponential functiongs; definite integrals; symmetric intervals