

高等数学与概率统计教学无缝衔接的研究与实践^{*}

薛美玉 梁飞豹 吕书龙 周 勇 游 华

(福州大学 数学与计算机科学学院 福建 福州 350108)

摘 要 基于高等数学与概率统计教学脱节的现状,文章从课程思想、教学方法、教学内容、学习方法和师资队伍五个方面,开展两门联动课程教学无缝衔接的研究,提出两门课程有效衔接的思路和策略。通过提升概率统计教与学,反哺高等数学的教与学。最后,挖掘高等数学成绩与概率统计成绩的联动效应,通过教学数据的实证分析,得出采用联动课程无缝衔接的教学模式可显著提升教学效果结论。

关键词 高等数学; 概率统计; 教学脱节; 无缝衔接

中图分类号 G642.0 **文献标识码** A

The Research and Practice of Seamless Connection in Higher Mathematics and Probability and Statistics Teaching

XUE Mei-yu, LIANG Fei-bao, LYU Shu-long, ZHOU Yong, YOU Hua

(College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou, 350108, China)

Abstract: Based on the present situation of disconnection between higher mathematics and probability and statistics teaching, from five aspects: course thought, teaching method, teaching content, learning method and teaching staff. This paper carried out the research of seamless connection in two linked courses teaching, and put forward the ideas and strategies of effective connection of the two courses. By improving the teaching and learning of probability and statistics, we can feed back the teaching and learning of higher mathematics. Finally, the linkage effect between higher mathematics score and probability and statistics score was explored. Through the empirical analysis of teaching data, it was shown that the teaching effect had been significantly improved with the seamless connection of linked courses.

Key words: higher mathematics; probability and statistics; teaching disconnection; seamless connection

^{*} 收稿日期 2019-03-18
资助项目 福建省“十三五”教育科学规划本科高校教改专项(项目编号: FBJG20180086); 2018 年福州大学一流本科教学改革建设项目; 福州大学 2020 年课程思政建设与研究项目“‘概率论与数理统计’融合课程思政的探索与实践”。
作者简介 薛美玉(1978-) 女, 福建福清人, 副教授, 主要从事概率统计与时间序列分析研究。

一、引言

马克思曾说过,一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步。高等数学(以下简称“高数”)和概率论与数理统计(以下简称“概率”)是数学领域的两大分支,其授课对象是理、工、经管类等除数学专业外的绝大部分本科生。这两门课的理论和方法与人类活动的各个领域都有不同程度的关联。两门课程关系密切,高数是概率的基础,概率是高数的延伸与拓展^[1]。

目前高数任课教师和概率任课教师是“铁路警察,各管一段”,鲜见两门课程有效衔接的做法。学生在学习高数时不能预见相关知识对概率的作用,在学习概率时由于高数基础不牢固,而概率任课教师出于学时的限制,往往无暇回顾高数的相关基础知识,学生便觉得概率晦涩难懂,产生畏难情绪,进而失去学习的兴趣。这是概率课程不及格率居高不下的一个原因。长此以往,非常不利于基础数学学科的健康发展、数学思想的广泛普及和数学素养的整体提升。

为此,课程组基于高数与概率教学脱节的现状,从课程思想、教学方法、教学内容、学习方法和师资队伍五个方面,开展两门课程教学无缝衔接研究,提出各方面的衔接策略,并收集了某高校人文学院和经济管理学院共八个专业两门课程多年的考试成绩等数据,进行实证分析。

二、教学无缝衔接的策略

(一) 课程思想的衔接

众所周知,概率的大厦是建筑在高数的地基之上的。高数的思想渗透到概率的方方面面,并直接指导概率中相关概念和相关理论的建立,从集合到随机事件,从积分到概率密度,从级数到数学期望,从极限到中心极限定理,积分思想和极限思想在概率中可以说是贯穿始终的。没有高数的推动,就没有概率的公理化与系统化,概率就难以形成一门独立的学科^[2]。

作为确定性数学典型代表的高数,其对概率的指导、渗透与推动决定了概率的确定论特征。但作为高数的后续课程,概率并没有按高数的思

维方法发展下去,而是另辟蹊径,挖掘随机现象的统计规律性,最终成为随机数学的典型代表,具备了与高数相当的地位。完全由确定性与随机性决定的当今世界,凸显了高数与概率的时代精神。

高数渗透到概率的方方面面,而概率渗透到现代生活的方方面面,拉普拉斯说“对于生活中的大部分,最重要的问题实际上只是概率问题”。两门课程的任课教师应该做好以上课程思想的衔接,使学生体会数学“源于生活、用于生活、高于生活”的思想,让学生明白所学知识与日常生活、自然和社会的密切联系,以便能够学以致用,知行合一。这也是数学课程的终极目标。

(二) 教学方法的衔接

二十一世纪的今天,社会已经由重视科学技术为主发展到以人为本的时代。教师要坚持以学生为本^[3],围绕如何让学生“乐意学、高效学”进行。

尤其是对于高数和概率等高度抽象的学科,两门课程的任课教师更应改变知识单一的灌输模式,采用科学的教学手段,通过启发式的演绎讲解、循序渐进的分析推导,结合案例式教学^[4]、讨论式教学、问题驱动教学^[5]、现代教育技术的综合运用,实现理论与实践、共性与个性、知识与能力的最佳平衡。

高数任课教师对概率所教内容的了解是不可或缺的。高数任课教师应该向刚进入大学的学生做好基础学科导论工作,强调高数对于概率和其他课程的影响,在整个基础学科的视角上正确认识高数课程,立足于数学学科的整体性,采用科学的教学方法,帮助学生有效衔接概率等后续课程。概率任课教师也应了解高数的内容,并在新课程开始之前,调查学生所熟悉的教学方法,基于调查结果,选择有效衔接的教学方法,有利于获得学生的认同感,也有利于学生新旧知识的衔接。以此为基础,使得教师的教学方法更有效地得到实施。

传统教育向现代教育的重要转型之一,就是实现由知识性教育向创造力教育的转变。教师的任务是教会学生正确运用创造性思维解决实际问题的方法,某种意义上,这比知识本身更重要。如图1所示,高数和概率的任课教师应该鼓励学生

在解题时使用发散思维,综合运用高数与概率方法,一题多解,还能由多种解法中高度概括、训练收敛思维,又能灵活转化高数与概率的语言,培养联想思维。训练和培养这些思维能力是实现创新的重要途径。

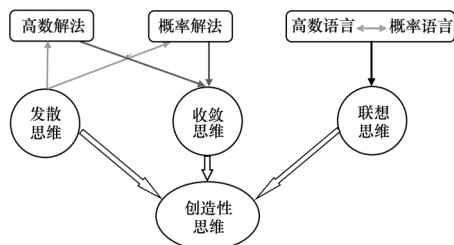


图1 创造性思维在联动课程的衔接

(三) 教学内容的衔接

课程思想是教学内容的方针,教学方法是教学内容的先导,思想与方法指引着内容的方向。表1按概率课程的教学顺序,列出了概率知识点与高数知识点之间的对应关系。可见高数与概率教学内容联系密切,教学内容衔接很有必要。

表1 两门课程知识点的对应关系

| 概率知识点 | 高数知识点 |
|-------------|--------------------|
| 随机事件的关系与运算 | 集合的关系与运算 |
| 一维离散型随机变量 | 无穷级数 |
| 一维连续型随机变量 | 定积分 |
| 随机变量的分布函数 | 变上限积分、线积分 |
| 二维连续型随机变量 | 二重积分 |
| 随机变量的联合分布函数 | 变上限积分、面积分 |
| 随机变量的数字特征 | 无穷级数、反常积分、定积分、二重积分 |
| 大数定律、中心极限定理 | 极限 |
| 最大似然估计 | 最值理论 |
| 估计量的一致性 | 极限 |

由表1可知,高数各知识点贯穿概率课程始终。

高数任课教师应该向学生传递,被积函数含有指数函数或指数函数与幂函数乘积的积分,在概率课程中占有重要的一席之地,应该认真掌握。

凑微分法、分部积分法和极坐标变换法是概率中经常使用的积分方法,必须重点讲述。无穷限的反常积分和无穷限的二重积分在高数中若较少涉及,将形成概率课程的一大学习障碍。由于概率中的概率密度一般是分段函数,分布函数又是概率密度的变上限积分,所以高数任课教师应该加强分段函数和变上限积分的教学。此外,无穷级数求和与离散型随机变量的相关知识密不可分。正如前文所言,高数是概率的基础。高数基础不牢,概率大厦将倒!

概率任课教师一方面可以用高数内容作为教学衔接的素材,例如集合的关系和运算与随机事件的关系和运算的衔接自然又和谐;又如讲随机变量的数学期望时,可以从无穷级数和反常积分的敛散性导入;再如讲最大似然估计时,免不了提及最值理论。使学生在加深理解新知的同时,复习了几乎休眠的旧知。另一方面,概率任课教师还可以有意识地引导学生用概率的方法去解决高数问题,比如被积函数含有指数函数的积分计算和一些几何级数的求和,可以引导学生巧妙引入正态分布、指数分布和几何分布等常见分布,给传统解题另辟蹊径。与其苦口婆心地强调常见分布的重要性,不如让学生自己体会它们的魔力与美妙,从而产生学习的热情和动力。

(四) 学习方法的衔接

任何一门课程,教师虽是主导,学生仍是主体。学生应该自主学习,养成良好的学习习惯,保证预习、听课、复习、练习四部曲。培根说“过于求速是做事的最大危险之一”。学习知识应该循序渐进,不可急于求成,以便保持持久的求知动力。探索将来专业课和职业对高数、概率等基础课的需要,需要是保持兴趣的引力,兴趣又是最好的老师。

温故而知新。在学习概率的过程,学生要不断复习高数中的相关知识,总结二者之间的联系。比如学习一维连续型随机变量时,要复习定积分;学习二维连续型随机变量时,要复习二重积分;学习数字特征时,要复习无穷级数。

学而不思则罔。学生要同时积极思考高数与概率知识之间的区别。比如,概率中只要有连续

型随机变量的地方,就有积分的影子。但概率中积分与高数有所不同:高数的被积函数多是初等函数,概率则一般是以分段函数形式出现的概率密度;高数中通常是有限区域的积分,而概率多是无穷限的反常积分;高数积分关于参数的讨论较少,概率则一般要讨论参数的取值。

《礼记·学记》说“虽有嘉肴,弗食,不知其旨也;虽有至道,弗学,不知其善也。”意思是求学过程要多钻研^{[6]88-90}。在学习过程中,学生除了体会高数和概率互相渗透的课程思想、适应教师的教学方法、挖掘相互联系的知识内容外,还应多关注数学史和数学家史^[7-8],钻研问题的由来过程和结论的探索过程,力求把其还原或模拟,更重要的是通过前人的启发,大胆猜想并论证有关结论。这样,知其然更知其所以然,形成了完善的思维结构,培养了创造性思维和数学能力。

高数是大学生入学接触到的第一门基础课,它学时长、内容广、理论深^[9]。为了树立学习信心,扫除学习心理障碍,学生应特别认真学习高数。高数成绩如果太低,将极大影响概率学习。学生应尽量不让这两门重要的基础课成为毕业、考研、就业的阻碍。

(五) 师资队伍衔接

教师是课堂教学的组织者。高数和概率两门课程的任课教师要发挥教学的主导作用,离不开师资队伍的良好衔接。

高数任课教师和概率任课教师教学上不能是“铁路警察,各管一段”,既不问来路,也不问去向。两个课程组的教师们应该加强沟通,经常探讨。比如高数中的极限、积分、微分以及级数在概率中的应用,概率的规范性、概率密度的性质、常见随机变量的分布以及数字特征在高数中的应用。定期举办教学沙龙、教学研讨等活动,对重难点问题,召开专题讨论会,让高数思想与概率思想有机地碰撞。一方面加强教师之间的联系,另一方面交流中将产生更多的教研教改机会,教带动研,研产生改,改促进教。

要加强高数和概率之间的联动,让独立的两门公共基础课的教学无缝衔接,教师应该同时熟悉高数和概率的内容。遗憾的是,许多教师常年

只讲授高数或只讲授概率。高数任课教师不懂概率的需求,概率任课教师也不懂高数的功效。高数和概率两门课程的教学过程犹如两列互不干扰的并行火车,谈何衔接?比较可行的是让教师同时或轮流肩负高数和概率的教学。

《礼记·学记》中说“教然后知困”“知困,然后能自强也”。教师在教学过程中会发现自己的各种不足,应该不断学习调研,学习先进的教学理念、采用先进的教学手段,并依据学习理论开展教学^[10]。据了解,会使用数学软件的基础课教师寥寥无几。教师应该学习数学软件,利用数学思想设计试验、建立模型,使抽象的数学知识得以直观地体现,如此才能不负信息技术时代,与学生学习模式保持同步,做到与时俱进。

三、教学无缝衔接的实证分析

(一) 成绩关系初探

基于上述联动课程教学无缝衔接的策略,调查某高校2015级、2016级人文学院和经济管理学院共431位学生,其中人文学院调查的是大学录取分数线相对较低的应用心理学、社会学两个专业共192位学生,经济管理学院调查的是大学录取分数线相对较高的金融、经济学、会计学、国际经济与贸易四个专业共239位学生,获取他们高数上、下册和概率的期末统考卷面成绩。鉴于高数有一册不及格而上下册平均成绩及格的同学占比不到十分之一,为了简单起见,以下分析过程使用的高数成绩是上下册的平均成绩。

首先,对高数成绩与概率成绩进行皮尔森相关性检验^[11],结果见表2。

表2 高数成绩与概率成绩的相关性检验

| 学院 | T 统计量 | 自由度 | 检验 p 值 | 相关系数 |
|------|--------|-----|---------|-------|
| 人文 | 12.851 | 190 | 2.2e-16 | 0.682 |
| 经济管理 | 13.295 | 237 | 2.2e-16 | 0.654 |
| 合计 | 19.586 | 429 | 2.2e-16 | 0.687 |

从相当小的检验 p 值得知,确实如前文所述,高数成绩与概率成绩是明显不独立的。但相关系数又不是非常大,说明用线性关系还不足以描述

二者之间的关系。

系,计算相关数据如表3。

接着,进一步挖掘高数成绩与概率成绩的关系。

表3 高数成绩与概率成绩关系初探

| 学院 | 总人数 /人 | 高数不及格 人数/人 | 占比 /% | 概率不及格 人数/人 | 占比 /% | 高数不及格中 概率不及格的比例/% | 概率及格中 高数及格的比例/% |
|------|-----------|---------------|----------|---------------|----------|----------------------|--------------------|
| 人文 | 192 | 63 | 32.81 | 98 | 51.04 | 74.60 | 82.98 |
| 经济管理 | 239 | 30 | 12.55 | 74 | 30.96 | 83.33 | 96.97 |
| 合计 | 431 | 93 | 21.58 | 172 | 39.91 | 77.42 | 91.89 |

假设随机事件 A 表示“学生高数上下册平均分及格”,随机事件 B 表示“学生概率及格”,由上表知道, $P(\bar{A}) = 21.58\%$, $P(\bar{B}) = 39.91\%$, $P(\bar{B} | \bar{A}) = 77.42\%$, $P(A | B) = 91.89\%$ 。另外还可以计算得到 $P(\bar{A}B) = 4.87\%$, $P(\bar{A}\bar{B}) = 23.20\%$ 。

从第一对指标可见,概率的不及格率远高于高数的不及格率,这是概率比高数难造成的吗?是概率任课教师不如高数任课教师尽责吗?是学生学习概率不如学习高数认真吗?其实不尽然,两门课程的成绩有极明显的联动效应。由第二对指标发现,在高数不及格的条件下,概率不及格的比例高达 77.42%;在概率及格的条件下,高数及格的比例高达 91.89%。如果学生的高数不及格,其概率也很可能不及格,如果学生的概率及格,其高数基本上已经顺利过关。第三对指标则说明,高数不及格概率却及格的学生远少于高数及格概率却不及格的学生。进一步证实了,如果学生的高数不及格,又不及时复习高数的相关内容,其概率几乎不太可能及格;即使高数及格了,如果忽略两门课程的关系,概率仍有较大可能不及格。可见高数不及格引起概率不及格的关联度大于高数及格使得概率及格的关联度^[12]。在数据分析的基础上,表明高数是概率的基础。

从表3还发现,虽然人文学院学生的数学基础远不如经济管理学院,但在这两门课程的成绩上,差距较大的只是绝对指标,经济管理学院的学生两门课程的不及格率比人文学院的低了 20% 左右,而相对指标却几乎无异,两个学院高数不及格的学生中都有七八成概率不及格,概率及格的同学中都有八九成是高数已经过关。这将启发我

们进行教学评价时,不能只盯着不及格率,还应该看教学转化率。

所以,教师和学生一定要充分认识两门课程的联动效应。学生为学好概率打好必备的高数基础,巩固高数的同时又学好概率。教师在提升概率教学效果的同时,还反过来促进高数的教学。这正与上文强调的无缝衔接教学观一致。

(二) 无缝衔接教学实践

笔者常年讲授大学数学公共基础课,经过三年的数据跟踪分析后,于 2018—2019 学年上学期,以该校 2017 级数学基础较差的风景园林专业和数学基础较好的财政学专业学生的概率论与数理统计课程为试点,从上文提及的五个方面践行两门课程的无缝衔接教学观。表4是这两个专业学生的高等数学和概率论与数理统计期末统考的各项数据。

表4 无缝衔接教学的实践

| 总人数 | 概率 平均分 | 高数 不及格率 /% | 概率 不及格率 /% | 高数不及格者中 概率不及格者的比例 /% |
|-----|-----------|------------------|------------------|----------------------------|
| 112 | 68.67 | 28.57 | 8.36 | 17.72 |

可见,践行了联动课程的无缝衔接教学观后,学生概率的平均分大幅提高。相比高数 28.57% 的不及格率,概率的不及格率降低了很多。值得一提的是,同期全校的概率不及格率高达 35.22%,平均分为 58.30。此外,一些学生由于高数成绩差或数学基础薄弱,产生畏惧概率的心理。故教师特别关注高数成绩不及格的同学,在概率学习的全过程,督促他们复习回顾高数的相关内容,并提供必要的帮助。最终,这些同学中概率不

及格的不足 1/5,打破了实施无缝衔接教学观之前“高数不及格的绝大部分同学,概率也将不及格”这个魔咒。因此,教师在教学中要因材施教,关注学生的差异性,寻求共性与个性的平衡。

综上,联动课程无缝衔接教学观的实施,极大地降低了课程的不及格率,提高了平均分,大大提升了教学效果。这样的教学是显著有效的,不仅为后续专业课程打下必备基础,而且能改变高数和概率成为许多学生毕业障碍的局面,切实提高学生的毕业率、考研率、就业率。事实上,这样的无缝衔接教学观可以推广应用到一切联动课程中。

四、结语

提高高等学校人才培养质量,是世界各国面向二十一世纪高等教育改革共同思考的主题^{[6]88-90},也是高等教育永恒的主题。高等数学与概率统计教学上应该无缝衔接,是这个主题下的真命题。

要实现高等数学与概率统计教学的无缝衔接,课程思想的衔接是前提,教学方法的衔接是关键,教学内容的衔接是起点,学习方法的衔接是支撑,师资队伍的连接是保证。两门课程的任课教师要齐心协力,求真务实,避免学生对数学基础课学习的“硬起飞”,扎扎实实地推进联动课程的教学无缝衔接,实现学生在数学基础课的学习上“软着陆”,才能顺利实现数学教育的贯通和协调发展。

参考文献:

- [1]滕吉红,鲁志波,黄晓英.在《概率论与数理统计》教学实践中反思《高等数学》教学[J].高等数学研究,2017,20(1):117-120.
- [2]王大胄.例谈概率论与微积分的联系及相互间的应用[J].沈阳工程学院学报(自然科学版),2008,4(3):283-286.
- [3]朱长江,郭艾,杨立洪.以生为本 多元融合 推进大学数学教学改革[J].中国大学教学,2015(5):59-62.
- [4]苏洪雨,江雪萍.高等数学案例教学的实践与探究[J].高等理科教育,2009,85(3):30-33.
- [5]尤慧,朱文芳.我国高等数学教学现状的研究述评[J].高等理科教育,2017,133(3):91-95.
- [6]张德然.关于概率论与数理统计课堂教学策略的优化[J].数学教育学报,1998,7(1):88-90.
- [7]汪晓勤.数学史与高等数学教学[J].高等理科教育,2009,84(2):20-24,31.
- [8]张弛.在概率统计教学中渗透数学史的做法与体会[J].高等教育研究,2006,22(1):57-59.
- [9]王伟.谈高等数学对工程数学成绩的相关性影响[J].长春大学学报,2003,13(6):40-42.
- [10]席阳,徐章韬.论基于学习理论的高等数学教学设计[J].高等理科教育,2016,127(3):96-102.
- [11]陆元鸿.数理统计方法[M].上海:华东理工大学出版社,2005:8,108-109.
- [12]章劲鸥,李国安.高等数学教学对概率统计教学的影响度分析[J].宁波大学学报(教育科学版),2002,24(4):109-110.

(责任编辑 袁 婷)